

# DINÁMICA NO LINEAL DE ROTORES: CONTACTO ROTOR-ESTATOR

Juan Manuel Domínguez<sup>a</sup> y Tomás Echarri<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Calle 1 y 47, (1900) La Plata, Buenos Aires, Argentina, [juanmanuel.dominguez@ing.unlp.edu.ar](mailto:juanmanuel.dominguez@ing.unlp.edu.ar)

<sup>b</sup>UIDET IAME, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Calle 1 y 47, (1900) La Plata, Buenos Aires, Argentina, [tomas.echarri@ing.unlp.edu.ar](mailto:tomas.echarri@ing.unlp.edu.ar)

## 1. INTRODUCCIÓN

En el contexto de las máquinas, la dinámica de rotores es la rama que estudia los sistemas en los cuales una parte, denominada rotor, rota con cierta cantidad de movimiento angular respecto de una parte fija, denominada estator.

Si la inercia, la rigidez o la disipación del sistema dependen de las variables de estado desplazamiento o velocidad, entonces la dinámica se denomina no lineal, y posee en ese caso atributos característicos como la presencia de bifurcaciones, movimiento periódico, cuasi-periodico y, ocasionalmente, caótico.

En rotores, el comportamiento característico de los sistemas no lineales aparece como consecuencia de un mal funcionamiento o perturbación del funcionamiento ideal. Uno de los fenómenos que produce un comportamiento fuertemente no lineal es el contacto rotor-estator que, además de tener interés práctico para incrementar el rendimiento de turbomáquinas y evitar la falla catastrófica de diferentes sistemas industriales, es de interés teórico por presentar una respuesta caótica en sistemas dinámicos abstractos.

El objetivo de este trabajo es estudiar de manera teórica y experimental los fenómenos que ocurren durante el contacto rotor-estator y caracterizar las diferentes respuestas de los sistemas rotantes debidas a esta falla.

## 2. SISTEMAS NO LINEALES

A diferencia de los sistemas lineales, cuya respuesta a una excitación armónica no resonante siempre es armónica, los sistemas no lineales pueden exhibir respuestas periódicas de diferente periodo, cuasi-periódica y caótica. En el primer caso, el espacio de fase muestra una trayectoria cerrada (órbita), mientras que en el segundo caso, cuando se tiene un oscilador forzado cuyo cociente entre frecuencias  $\omega_1/\omega_2$  es irracional, las trayectorias inscritas en un toro nunca se cierran, “recubriendo” la superficie del mismo. Si se toma una sección de Poincaré en cada caso para develar las geometrías de los atractores, el comportamiento periódico muestra tantos puntos como periodos tenga el movimiento, mientras el comportamiento cuasi-periódico muestra una curva cerrada. Por otra parte, el comportamiento caótico puede definirse de manera rigurosa como un comportamiento aperiódico a largo plazo (no transitorio) de un sistema determinístico. En este caso, la sección de Poincaré revela un atractor de estructura (frecuentemente) fractal.

La principal característica del comportamiento caótico es la dependencia sensible a las condiciones iniciales. Ésto quiere decir que, conforme evoluciona la dinámica del sistema, las trayectorias seguidas por dos condiciones iniciales vecinas divergen de manera exponencial.

A partir de lo analizado anteriormente, resulta razonable conjeturar que el incremento de la dimensión del sistema aumenta la complejidad de las trayectorias en el espacio de fase. Puede demostrarse (Teorema de Poincaré-Bendixson) que, para que un sistema continuo autónomo presente comportamiento caótico, es suficiente que su dimensión sea  $N \geq 3$ . Además, también puede demostrarse que la existencia de órbitas de periodo 3 implican la existencia de órbitas de periodo arbitrario (Teorema de Sarkovskii-Li-Yorke). Si dichas órbitas resultan inestables, la dinámica del sistema migra de un lugar a otro en el espacio de fase sin encontrar el equilibrio en estado estacionario, dando lugar al comportamiento caótico.

### 3. CONTACTO ROTOR-ESTATOR

Se denomina contacto rotor-estator al fenómeno en el cual el rotor y el estator de una máquina rotativa impactan entre sí. El mismo puede ser modelado de manera simplificada como se observa en la Figura 1.

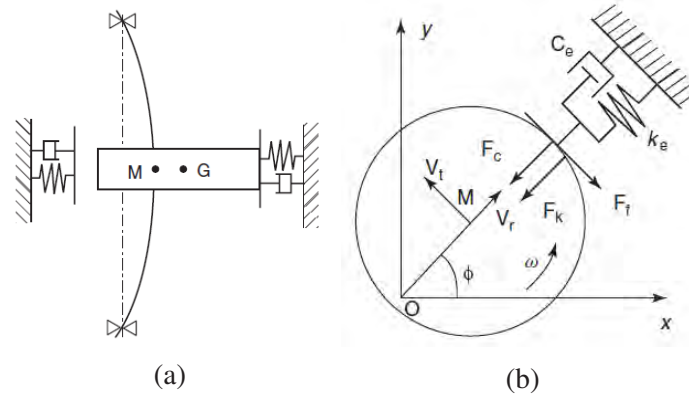


Figura 1: Rotor (a) y modelo del contacto rotor-estator (b).

La ecuación de movimiento (compleja) del sistema resulta

$$m\ddot{r} + c\dot{r} + kr + F_k + F_c + F_f = Mr_G\omega^2 e^{i\omega t} \quad (1)$$

En esta ecuación  $r = \hat{r}e^{i\phi}$  representa la deflexión del árbol,  $\{m, c, k\}$  se interpretan como la inercia, rigidez y el amortiguamiento, modal sin contacto. Las fuerzas radiales  $F_k$  y  $F_c$  debidas a la rigidez y el amortiguamiento introducidos por el contacto están dadas por

$$F_k = k_e \langle r - h \rangle \frac{r}{|r|}, \quad F_c = c_e \dot{r} H(r - h) \frac{r}{|r|} \quad (2)$$

donde  $h$  es huelgo entre el rotor el estator,  $\langle \cdot \rangle$  es la función rampa y su derivada  $\langle \cdot \rangle' = H(\cdot)$  es la función de Heaviside. Los parámetros de rigidez y amortiguamiento efectivos  $k_e$  y  $c_e$  se determinan resolviendo el problema de contacto.

Además, cuando el rotor hace contacto con el estator, se produce una fuerza en dirección tangencial, producto de la fricción

$$|F_f| = \mu |F_k + F_c| \quad (3)$$

En este modelo simplificado puede observarse cómo el sistema, que en condiciones normales de funcionamiento es lineal, se convierte en un sistema no lineal cuando el contacto se hace presente vía  $H(\cdot)$ . Consecuentemente, la respuesta estacionaria del sistema ya no es únicamente armónica, sino que puede tener los atributos anteriormente mencionados.

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para estudiar experimentalmente el comportamiento de los sistemas rotantes durante el contacto rotor-estator, se utilizó un banco de pruebas de dinámica de rotores compuesto de un rotor con un volante de posición variable, apoyado sobre dos cojinetes lubricados y excitado por un motor eléctrico de corriente continua. Se realizaron ensayos en estado estacionario con la velocidad de rotación como parámetro de control, para diferentes configuraciones de contacto. En todos los ensayos se observó el desplazamiento con un sensor de proximidad en dirección vertical ( $y$ ). Luego se post-procesaron las señales adquiridas para obtener diagramas de bifurcaciones, formas de onda y espectros de frecuencia, secciones de Poincaré, pseudo espacios de fase y exponentes de Lyapunov. En la Figura 2 se muestran el banco y los elementos utilizados para generar el contacto.



Figura 2: banco de pruebas (a), contactor radial (b) y contactor vertical (c).

A continuación se expondrán de manera resumida los resultados que permiten caracterizar los diferentes comportamientos de un sistema durante el contacto rotor-estator.

**Diagrama de Bifurcaciones.** Los diagramas de bifurcaciones se construyen relevando la posición vertical del eje del rotor en cada sección estroboscópica (en sincronía con la excitación) para cada velocidad de rotación del banco (parámetro de control de los ensayos). La Figura 3 muestra uno de los diagramas de bifurcaciones obtenidos. En el mismo se observa cómo tienen lugar los movimientos 1-órbita (entre 1000 y 1500 rpm), 2-órbita (entre 1500 y 1600 rpm) y presumiblemente cuasi-periódico o caótico (entre 2100 y 2600 rpm).

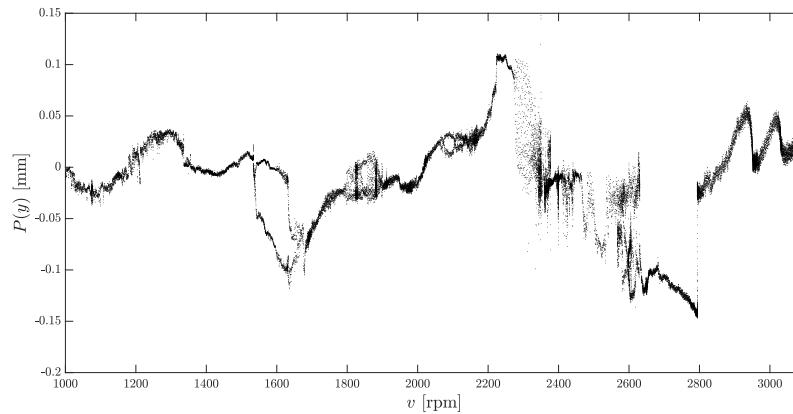


Figura 3: diagrama de bifurcaciones para volante en voladizo y contacto radial.

**Forma de Onda y Espectro de Frecuencia.** Para la respuesta temporal, la señal analógica es discretizada mediante la adquisición del valor  $y(t[n]) = y[n]$ , donde  $t[n] = t_0 + n/F_S$ , con  $F_S$  la frecuencia de muestreo.

Para obtener el espectro de frecuencia se utilizó la transformada rápida de Fourier (FFT).

La Figura 4 muestra algunas de las formas de onda y espectros de frecuencia obtenidos. En la Figura 4a se observa un movimiento 2-órbita, con periodo de respuesta igual al doble del de excitación y con la aparición del sub-armónico 1/2 en el espectro. En la figura 4b se observa un movimiento presumiblemente caótico, donde no aparece un periodo de respuesta definido y se observa un ensanchamiento en las frecuencias de los picos máximos.

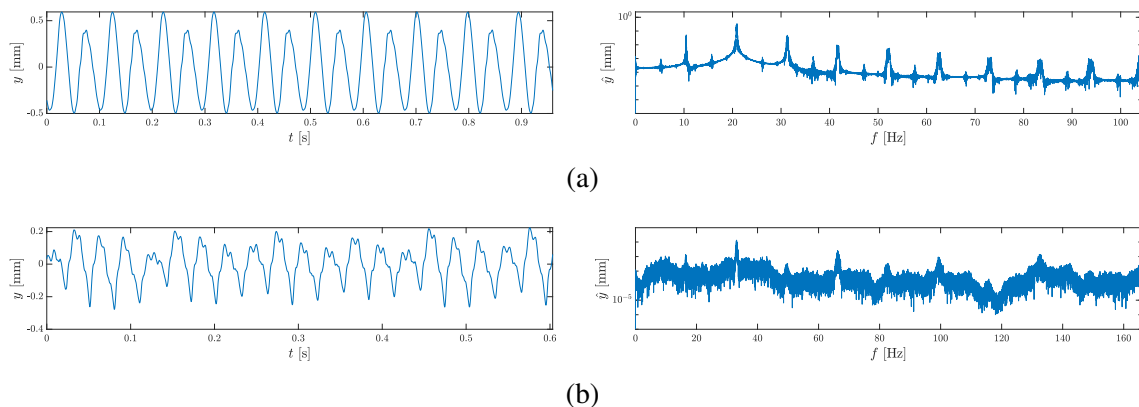


Figura 4: formas de onda y espectros de frecuencia de movimientos 2-órbita para volante centrado y sin contacto @3319 rpm (a) y presumiblemente caótico para volante centrado y contacto vertical @1989 rpm (b).

**Mapeo de Poincaré.** Una alternativa para generar un mapeo de un flujo como la sección de Poincaré es la aplicación  $T$  o estroboscópica, la cual se construye a partir de una muestra discreta  $x_n = x(t_n)$ , a intervalos regulares  $t_n = t_0 + nT$ . El período de muestreo se selecciona convenientemente para capturar el comportamiento dinámico en sincronía con la excitación.

Las Figuras 5a, b, c y d muestran las secciones de Poincaré para movimientos 1-órbita, 2-órbita, presumiblemente cuasi-periódico y presumiblemente caótico respectivamente. En las

mismas se grafican varias secciones en diferentes colores, cada una de ellas para una fase de excitación. En las Figuras 5a y b se observan atractores con forma de punto, típicos de los movimientos p-órbita. La Figura 5c muestra la particularidad del movimiento cuasi-periódico, donde las secciones debelan curvas cerradas. Por último, las secciones de la Figura 5d revelan un atractor con todas las características de los atractores extraños.

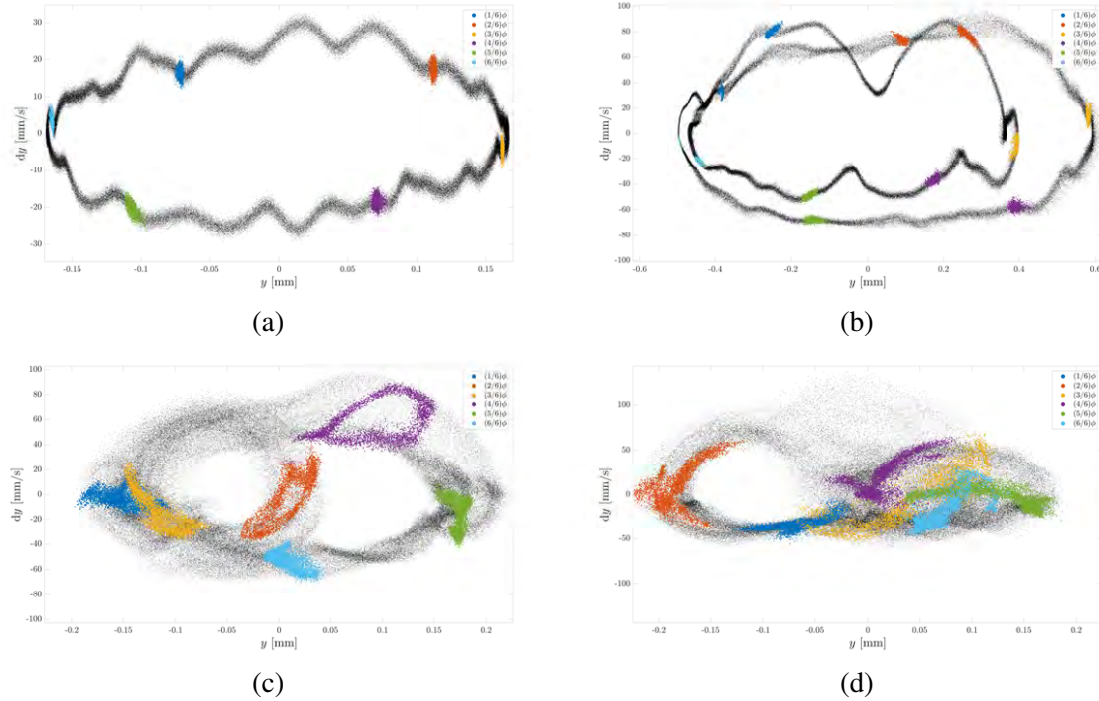


Figura 5: Secciones de Poincaré. Volante centrado, sin contacto @1253 rpm (a) y con contacto radial @1251 rpm (b); volante en voladizo, contacto radial @2105 rpm (c) y @2335 rpm (d).

**Pseudo Espacio de Fase y Exponente de Lyapunov.** Cuando no es posible medir con precisión todas las variables de estado del sistema para obtener el espacio de fase, es posible construir un vector a partir del muestreo retardado de una función escalar del vector de estado  $g(t) = G(x(t))$ , de la forma

$$y = \{g(t), g(t - \tau), g(t - 2\tau), \dots, g(t - M\tau)\} \quad (4)$$

donde  $\tau$  es el periodo fundamental, seleccionado en función del tiempo característico de la variación de  $g(t)$ . Para satisfacer el requerimiento de independencia  $\tau$  corresponde al primer cruce por cero de la función de autocorrelación.

Dicha representación se denomina pseudo espacio de fase, y puede demostrarse que el mismo captura todas las características del espacio de fase, si  $M$  es suficientemente grande (matemáticamente, es un encaje). Como se observa solo la el desplazamiento vertical, si este es pequeño, el espacio de fase del sistema autónomo puede considerarse de dimensión  $N = 3$ , debido a la excitación (armónica).

Las Figuras 6a, b, c y d muestran los pseudo espacios de fase para movimientos 1-órbita, 2-órbita, presumiblemente cuasi-periódico y presumiblemente caótico respectivamente. Al igual que las secciones de Poincaré, estas gráficas revelan las características de cada movimiento.

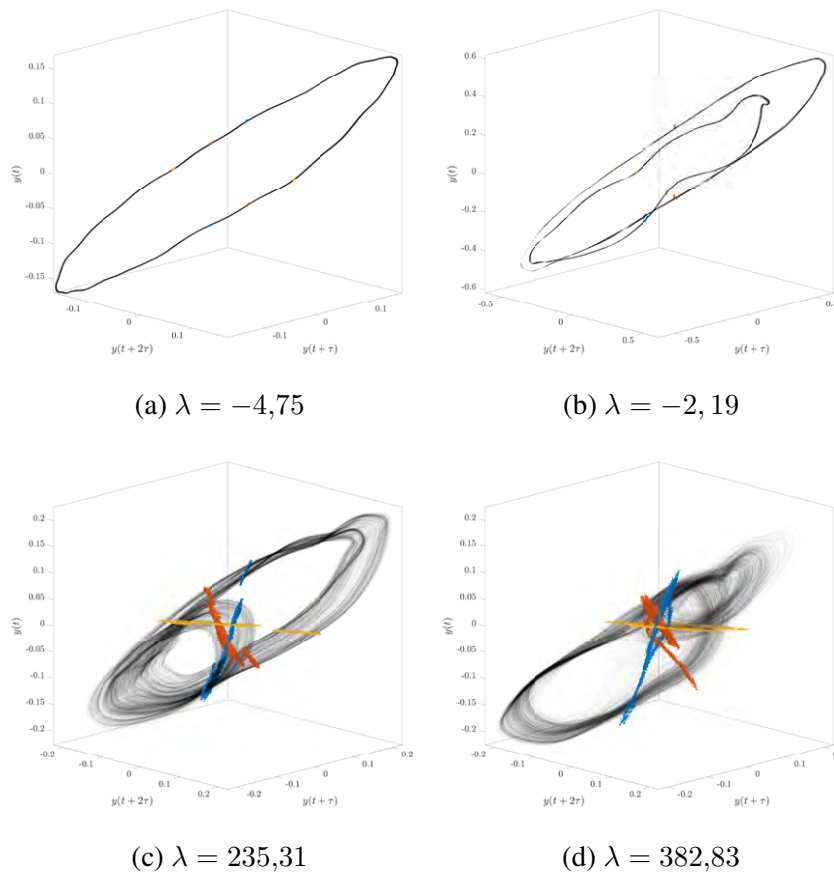


Figura 6: Pseudo espacio fase y exponente de *Lyapunov*. Volante centrado, sin contacto @1253 rpm (a) y con contacto radial @1251 rpm (b); volante en voladizo, contacto radial @2105 rpm (c) y @2335 rpm (d).

La divergencia entre trayectorias de dos condiciones iniciales vecinas en el pseudo espacio de fase está dada por  $d(t) = d_0 2^{\lambda t}$  donde  $\lambda$  es el exponente de *Lyapunov*. Este exponente cuantifica dicha divergencia. De este modo, cuando  $\lambda > 0$ , las trayectorias divergen de manera exponencial y consecuentemente el comportamiento es caótico, mientras que si  $\lambda < 0$ , las trayectorias convergen y el movimiento es disipativo ordinario. Al pie de la Figura 6 se exponen los valores de los exponentes de *Lyapunov* calculados mediante el algoritmo de Wolf.

## 5. CONCLUSIONES

En los resultados obtenidos se observan bifurcaciones, movimiento aperiódico, la proliferación de sub-armónicos (fundamentalmente  $\omega/2$ ) y el incremento del ancho de banda del espectro en la transición al movimiento presumiblemente caótico. En estos regímenes el pseudo-espacio de fases revela el engrosamiento del atractor, la autocorrelación de la señal decae rápidamente y el exponente de *Lyapunov* calculado es positivo, indicando la pérdida de información sobre las condiciones iniciales y la divergencia exponencial de trayectorias cercanas respectivamente. El análisis experimental del contacto rotor-estator permitió caracterizar la dinámica de los diferentes movimientos que tienen lugar durante esta falla (periódico, cuasi-periódico y presumiblemente caótico). Si bien la aperiodicidad observada puede provenir de variables no controladas, la respuesta obtenida mantiene todas las características observadas en oscilado-

res caóticos teóricos. A partir de este estudio, se adquirieron conceptos teóricos para detectar comportamientos altamente nocivos para elementos mecánicos industriales.

## **REFERENCIAS**